第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0011-10

衍生证券的最优投资消费决策*

郭文旌

(南京财经大学金融学院，南京 210046)

摘　要: 衍生证券在实际交易中的买卖价格一般是不一样的。本文讨论了衍生证券买卖价格不同时的投资消费决策问题。以最大化投资者消费效用和终值效用为目标，建立模型。应用随机最优控制方法，分三种情形进行讨论，得到不同情形下一般效用函数的最优投资消费策略，还给出了幂效用函数情形的策略解析形式。最后，用数值例子说明了投资消费策略随着不同市场情形的变化情况。

关键词: 衍生证券；投资消费；买卖价差；幂效用函数

分类号: **AMS**(2000) 91B28; 91B70　　**中图分类号**: O221.3　　**文献标识码**: A

1　引言

对于个体投资者而言，就是分配好自己的财富，一部分用于投资，剩下的用于消费。那么用多少量去投资，多少量消费才能使投资者获得的效用最大呢？这就是投资消费决策问题。投资消费决策问题一直是数理金融理论研究的焦点。Merton[1,2] 开创了连续时间投资消费问题的研究。随后 Karatzas, Lehoczky 与 Shreve[3,4]，Sethi[5]，Hauson 与 Westman[6], Ksendal 与 Sulem[7]，郭文旌等[9-11] 在 Merton 的模型框架下做了许多发展和推广性的工作。但是这一系列的研究都是把投资者的投资对象局限于股票和债券。这是由模型最初产生时的市场条件所决定的。但随着金融市场的发展，很多衍生产证券，比如期权、期货、股指等，已经成为资本市场上很抢手的交易对象。世界各地许多证券市场都进行期权、期货交易，比如美国芝加哥期权交易所、纽约股票交易所，欧洲期货与期权交易所，日本的东京财经期货交易所等。上世纪 90 年代我国市场也开始了衍生证券的交易，到 2004 年交易额就达到 14.51 万亿元。因此当前的投资者投资对象的选择范围除了一般的风险证券、无风险证券还有许多衍生证券。因此研究衍生证券为投资对象的投资消费问题具有重要的现实意义。Peter[8] 研究了衍生证券的标的资产服从跳跃 Levy 过程的衍生证券投资消费问题，郭文旌等[9] 研究了衍生证券的标的资产服从一般扩散过程的衍生证券投资消费问题。但关于这个问题的研究，一般都假设衍生证券交易中买卖价格是一致的。而在实际的交易中买卖价格一般是不同的，因为衍生证券的交易一般都是在做事商参与下进行的，做事商要赚取买卖差价。

本文研究了投资对象为一个无风险证券、一个风险证券和一个衍生证券的投资消费决策问题。建立投资者的效用最大化模型，应用随机控制方法得到了一般效用函数情形下投资消费策略的一般形式，并且在幂效用函数情形下，得到了最优投资消费策略的解析形式。

收稿日期: 2008-02-26.　**作者简介**: 郭文旌 (1971年11月生)，男，博士，副教授. 研究方向：组合投资与风险管理.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (70871058; 70701016)；教育部科技创新工程重大项目培育资金 (708044)；江苏省高校哲学社会科学基金 (07SJB790013; 09SJB790013)； 江苏省高校自然科学基金 (08KJB110004)； 中国博士后科学基金 (20080431079)；中国博士后科学基金特别资助基金 (200902507).

2 市场环境与投资模型

假定投资者的投资组合是由一个无风险证券、一个风险证券和一个衍生证券构成。无风险证券的价格 $P_0(t)$ 满足如下微分方程

$$\mathrm{d}P_0(t) = P_0(t)r(t)\mathrm{d}t,$$

风险证券的价格 $P(t)$ 满足如下微分方程

$$\mathrm{d}P(t) = P(t)\left[\, b(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W^1(t)\,\right],$$

其中 $b(t)$, $\sigma(t)$ 分别表示风险证券的瞬时预期收益率和价格的波动率，$r(t)$ 为无风险证券的利率，而且都是关于时间的有界函数。$W^1(t)$ 为一维的标准 Brown 运动。

用 $F(t;S)$, $G(t;S)$ 分别表示标的资产为 S 的衍生证券的买入、卖出价格。因为做市商需要从价格的变动中获取部分利润，不妨设为 $a(t)$。做市商在不同的时点上根据市场行情来决定 $a(t)$。设 $F(t;S)$, $G(t;S)$ 分别满足下面随机微分方程

$$\mathrm{d}F(t;S) = F(t;S)\left[\, \Phi(t,S)\mathrm{d}t + \Omega(t,S)\mathrm{d}W^2(t)\,\right], \tag{1}$$

$$\mathrm{d}G(t;S) = G(t;S)\left[\, (\Phi(t,S) - a(t))\mathrm{d}t + \Omega(t,S)\mathrm{d}W^2(t)\,\right], \tag{2}$$

其中 $W^2(t)$ 为一维标准 Brown 运动，$W^1(t)$ 与 $W^2(t)$ 相互独立，而且 $a(t) \geq 0,\ t \in [0,T]$。

设 $\pi_0(t)$, $\pi(t)$, $\pi_d(t)$ 分别为投资者 t 时刻投入到无风险证券、风险证券及衍生证券上的投资量，可正可负，为正时表示持有多头，为负时表示持有空头。$N_0(t)$, $N(t)$, $N_d(t)$ 分别为投资者对无风险证券、风险证券和衍生证券的持有份数。设 $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ 表示投资者的财富过程，投资者的初始财富为 x，则有下面关系成立

$$\pi_0(t) = N_0(t)P_0(t), \quad \pi(t) = N(t)P(t), \quad \pi_d(t) = \begin{cases} N_d(t)F(t,S), & N(t) > 0, \\ N_d(t)G(t,S), & N(t) \leq 0. \end{cases}$$

以及

$$\pi_0(t) + \pi(t) + \pi_d(t) = x(t).$$

设 $\{c(t), 0 \leq t \leq T\}$ 表示投资者单位时间内的消费量相对财富的比率。易知 $x(t)$ 满足下面微分方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) \;&=\; \left\{ \begin{array}{ll} N_0(t)\mathrm{d}P_0(t) + N(t)\mathrm{d}P(t) + N_d(t)\mathrm{d}F(t,S) - c(t)\mathrm{d}t, & N(t) > 0 \\ N_0(t)\mathrm{d}P_0(t) + N(t)\mathrm{d}P(t) + N_d(t)\mathrm{d}G(t,S) - c(t)\mathrm{d}t, & N(t) \leq 0 \end{array} \right\} \\ &=\; \big[x(t)\Phi(t,S) + \pi_0(r(t) - \Phi(t,S)) + \pi(t)(b(t) - \Phi(t,S)) \\ &\quad +(x(t) - \pi_0(t) - \pi(t))^- a(t) - c(t)\big]\mathrm{d}t + \pi(t)\sigma(t)\mathrm{d}W^1(t) \\ &\quad +(x(t) - \pi_0(t) - \pi(t))\Omega(t;S)\mathrm{d}W^2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\big(x(t) - \pi_0(t) - \pi(t)\big)^- = \max\big\{ -x(t) + \pi_0(t) + \pi(t), 0\big\}.$$

方程 (3) 满足初始条件 $x(0)=x$。令

$$J(x;\pi_0,\pi,c)=E\Big[\int_0^T U_1\big(t,c(t)\big)\mathrm{d}t+U_2\big(T,x(T)\big)\mid x(0)=x\Big], \tag{4}$$

其中 $U_1(\cdot,c)$, $U_2(\cdot,x)$ 分别为关于 c, x 的严格凹的效用函数[1]。

定义 1　称三元组 $(\pi(t),\pi(t),c(t))$ 为一个允许策略，如果

$$\int_0^T |\pi_0(t)|^2\mathrm{d}t<\infty,\quad a.s.,\qquad \int_0^T |\pi(t)|^2\mathrm{d}t<\infty,\quad a.s.,$$

$$c(t)\geq 0,\quad t\in[0,T],\qquad \int_0^T c(t)\mathrm{d}t<\infty,\quad a.s..$$

所有允许策略的集合称为允许策略集，记为 $\Lambda(x)$。

投资者的目标就是要在 $\Lambda(x)$ 中找出一个决策 $(\pi_0^*,\,\pi^*,\,c^*)$ 使得其效用的期望值最大，也就是求解下面的最优化问题

$$V(t,x)=\max_{(\pi_0,\pi,c)\in\Lambda(x)} J(x;\,\pi_0,\,\pi,\,c). \tag{5}$$

显然 $V(0,x)=J(x;\,\pi_0^*,\,\pi^*,\,c^*)$。我们把 $V(t,x)$ 称为最优化问题 (5) 的值函数。

3　最优投资消费策略

应用最优化原理及Itô公式，得 (5) 所对应的 HJB (Hamilton Jacobi Bellman) 方程为

$$\begin{aligned}0 =\ & V_t+x(t)\Phi(t,S)V_x+\max_c\big\{U_1(t,c)-c(t)V_x\big\}\\ &+\max_{\pi_0,\pi}\Big\{\big[\pi_0(t)(r(t)-\Phi(t,S))+\pi(t)(b(t)-\Phi(t,S))-(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^-a(t)\big]V_x\\ &+\frac{1}{2}\big[\pi(t)^2\sigma(t)^2+(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^2\Omega(t,S)^2\big]V_{xx}\Big\}.\end{aligned} \tag{6}$$

不妨设最优投资消费策略为 $(\pi_0^*,\,\pi^*,\,c^*)$。那么由 HJB 方程的一阶条件得

$$c^*(t)=I_1(t,V_x), \tag{7}$$

其中 $I_1(t,\cdot)$ 为 $\frac{\partial U_1(t,c)}{\partial c}$ 的逆函数。令

$$\begin{aligned}f(\pi_0,\pi)&=\big[\pi_0(t)(r(t)-\Phi(t,S))+\pi(t)(b(t)-\Phi(t,S))-(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^-a(t)\big]V_x\\ &\quad+\frac{1}{2}\big[\pi(t)^2\sigma(t)^2+(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^2\Omega(t,S)^2\big]V_{xx},\\ f_1(\pi_0,\pi)&=\big[\pi_0(t)(r(t)-\Phi(t,S))+\pi(t)(b(t)-\Phi(t,S))\big]V_x\\ &\quad+\frac{1}{2}\big[\pi(t)^2\sigma(t)^2+(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^2\Omega(t,S)^2\big]V_{xx},\\ f_2(\pi_0,\pi)&=\big[\pi_0(t)(r(t)-\Phi(t,S)+a(t))+\pi(t)(b(t)-\Phi(t,S)+a(t))-x(t)a(t)\big]V_x\\ &\quad+\frac{1}{2}\big[\pi(t)^2\sigma(t)^2+(x(t)-\pi_0(t)-\pi(t))^2\Omega(t,S)^2\big]V_{xx}.\end{aligned}$$

显然

$$f(\pi_0,\pi)=\begin{cases} f_1(\pi_0,\pi), & \pi_0+\pi\le x,\\ f_2(\pi_0,\pi), & \pi_0+\pi>x. \end{cases}$$

由二元函数极值的求解原理易得，当

$$\begin{cases} \hat{\pi}_0(t)=\left[\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x}{V_{xx}}+x(t),\\ \hat{\pi}(t)=-\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\frac{V_x}{V_{xx}}, \end{cases} \tag{8}$$

时，$f_1(\pi_0,\pi)$ 取到最大值，即

$$\begin{aligned} &\max_{\pi_0,\pi} f_1(\pi_0,\pi)\\ =\ & f_1(\hat{\pi}_0,\hat{\pi})\\ =\ & -\frac{1}{2}\Big[\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\Big]\frac{V_x^2}{V_{xx}}+x(t)\big[r(t)-\Phi(t,S)\big]V_x. \end{aligned}$$

当

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_0(t)=\left[\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-a(t)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x}{V_{xx}}+x(t),\\ \tilde{\pi}(t)=-\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\frac{V_x}{V_{xx}}, \end{cases} \tag{9}$$

时，$f_2(\pi_0,\pi)$ 取到最大值，即

$$\begin{aligned} &\max_{\pi_0,\pi} f_2(\pi_0,\pi)\\ =\ & f_2(\tilde{\pi}_0,\tilde{\pi})\\ =\ & -\frac{1}{2}\Big[\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-a(t)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\Big]\frac{V_x^2}{V_{xx}}+x(t)\big[r(t)-\Phi(t,S)\big]V_x. \end{aligned}$$

从(8)、(9)容易发现

$$\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)\le\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t).$$

为了得到 $f(\pi_0,\pi)$ 的最大值点，下面分三种情形来进行讨论。

情形1 $x(t)\le\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)$。

对任意满足 $\pi_0(t)+\pi(t)\le x(t)$ 的 $(\pi_0(t),\pi(t))$，都有

$$f_1(\pi_0,\pi)\le f_1(\pi_0,\pi)\,|_{\pi_0+\pi=x}=f_2(\pi_0,\pi)\,|_{\pi_0+\pi=x}\le f_2(\tilde{\pi}_0,\tilde{\pi}).$$

所以对任意的 $(\pi_0,\pi)\in\Lambda(x)$ 都有

$$\begin{aligned} &\max_{\pi_0,\pi} f(\pi_0,\pi)\\ =\ & f_2(\tilde{\pi}_0,\tilde{\pi})\\ =\ & -\frac{1}{2}\Big[\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-a(t)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\Big]\frac{V_x^2}{V_{xx}}+x(t)\big[r(t)-\Phi(t,S)\big]V_x. \end{aligned}$$

所以，$f(\pi_0,\pi)$ 的极大值点为

$$\begin{cases} \pi_0^*(t)=\tilde{\pi}_0(t)=\left[\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-a(t)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x}{V_{xx}}+x(t), \\ \pi^*(t)=\tilde{\pi}(t)=-\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\frac{V_x}{V_{xx}}. \end{cases} \tag{10}$$

将 (10) 代入 (6) 得该情形对应的 HJB 方程为

$$\begin{cases} V_t+x(t)rV_x+U_1(t,c^*)-c^*(t)V_x-\frac{1}{2}\left[\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-a(t)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x^2}{V_{xx}}=0, \\ V(T,x)=U_2(T,x). \end{cases} \tag{11}$$

情形 2　$\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)\le x(t)\le\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t)$。
为了找到 $f(\pi_0,\pi)$ 在该情形下的极大值点，需要考虑下面两个最优化问题

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi_0,\pi} f_1(\pi_0,\pi), \\ \pi_0(t)+\pi(t)\le x(t), \quad t\in[0,T]. \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi_0,\pi} f_2(\pi_0,\pi), \\ \pi_0(t)+\pi(t)\ge x(t), \quad t\in[0,T]. \end{cases} \tag{13}$$

首先应用条件极值原理求解问题 (12)。建立 Lagrange 函数

$$L(\pi_0,\pi,\lambda)=f_1(\pi_0,\pi)-\lambda(x-\pi_0-\pi),$$

其中 λ 为某个非负参数。由 K-T 条件，最优值点必定满足

$$\frac{\partial L}{\partial\pi_0}=\frac{\partial f_1}{\partial\pi_0}+\lambda=0, \quad \frac{\partial L}{\partial\pi}=\frac{\partial f_1}{\partial\pi}+\lambda=0, \quad \lambda(x-\pi_0-\pi)=0, \quad \lambda\ge 0. \tag{14}$$

由 (14) 可知

$$\frac{\partial f_1}{\partial\pi_0}-\frac{\partial f_1}{\partial\pi}=0.$$

即

$$\big(b(t)-r(t)\big)V_x+\pi\sigma(t)^2V_{xx}=0. \tag{15}$$

解之得

$$\bar{\pi}:=-\frac{(b(t)-r(t))V_x}{\sigma(t)^2V_{xx}}. \tag{16}$$

断言这里 $\lambda>0$，根据 $x-\pi_0-\pi=0$ 得

$$\bar{\pi}_0:=x(t)+\frac{(b(t)-r(t))V_x}{\sigma(t)^2V_{xx}}. \tag{17}$$

由于 (12) 为一个凸规划问题，所以 $(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})$ 就是最优化问题 (12) 的最优值点。容易验证 $(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})$ 也是最优化问题 (13) 的最优值点。所以 $(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})$ 就是 $f(\pi_0,\pi)$ 的全局最优点。

将 $(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})$ 代入 $f(\pi_0,\pi)$ 得该情形对应的 HJB 方程为

$$\begin{cases} V_t+x(t)r(t)V_x+U_1(t,c^*)-c^*(t)V_x-\frac{1}{2}\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\frac{V_x^2}{V_{xx}}=0, \\ V(T,x)=U_2(T,x). \end{cases} \tag{18}$$

情形 3 $\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t)\le x(t)$。

在情形 2，我们已经求得问题 (12) 的最优解为 $(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})$，故对任意满足 $\pi_0(t)+\pi(t)>x(t)$ 的 $(\pi_0(t),\pi(t))\in\Lambda(x)$ 有

$$f_2(\pi_0,\pi)\le f_2(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})=f_1(\bar{\pi}_0,\bar{\pi})\le f_1(\hat{\pi}_0,\hat{\pi}).$$

故 $f(\pi_0,\pi)$ 在该情形下，在点 $(\hat{\pi}_0(t),\hat{\pi}(t))$ 取到最大值，即

$$\begin{cases} \pi_0^*(t)=\hat{\pi}_0(t)=\left[\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x}{V_{xx}}+x(t), \\ \pi^*(t)=\hat{\pi}(t)=-\frac{(b_1-r)V_x}{\sigma_1^2V_{xx}}. \end{cases} \tag{19}$$

此时的 HJB 方程为

$$\begin{cases} V_t+x(t)r(t)V_x+U_1(t,c^*)-c^*(t)V_x-\frac{1}{2}\left[\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\right]\frac{V_x^2}{V_{xx}}=0, \\ V(T,x)=U_2(T,x). \end{cases} \tag{20}$$

综合以上结果，有如下结论成立。

定理 1 对一般严格凹的效用函数，最优投资消费策略分别由 (10), (16), (17) 和 (19) 给出。

注 1 定理 1 给出的并不是策略的解析形式，对一般效用函数而言解析形式不一定存在，但 Merton[1] 证明，当效用函数为 HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 系列函数时，可以得到策略的解析表达式。

4 幂效用函数情形下的最优策略

假定两个效用函数均为下面形式的幂函数形式

$$U_1(t,c)=U_2(t,c)=\mathrm{e}^{-\rho t}\frac{c^\lambda}{\lambda}, \tag{21}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$，$\rho>0$ 为折扣因子。这表明投资者为风险规避型的。

据 (7) 容易算得

$$c^*(t)=\left(\mathrm{e}^{\rho t}V_x\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}. \tag{22}$$

将以上效用函数以及 (21) 分别代入 (11), (18) 和 (20)，并通过繁琐的计算，解所得到的 HJB 方程得到如下结果。

1) $x(t)\le\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)$。

值函数为 $V(t,x)=\alpha(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}$，最优投资消费策略为

$$\begin{cases} \pi_0^*(t)=\left[\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-a(t)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right)+1\right]x(t), \\ \pi^*(t)=\frac{(b(t)-r(t))}{(1-\lambda)\sigma(t)^2}x(t), \\ c^*(t)=\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}[\alpha(t)]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t). \end{cases} \tag{23}$$

其中

$$\alpha(t)=\mathrm{e}^{\int_t^T g(s)\mathrm{d}s}\Big[\mathrm{e}^{\frac{\rho T}{\lambda-1}}+\frac{1}{1-\lambda}\int_t^T h(s)\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda-1}\int_s^T g(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]^{1-\lambda},$$

$$g(t)=\lambda\Big[r(t)+\frac{1}{2(1-\lambda)}\Big(\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-a(t)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\Big)\Big],$$

$$h(t)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}.$$

2) $\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)\le x(t)\le\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t)$。
值函数为 $V(t,x)=\beta(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}$，最优投资消费策略为

$$\begin{cases}\pi_0^*(t)=\Big[\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+1\Big]x(t),\\ \pi^*(t)=\frac{(b(t)-r(t))}{(1-\lambda)\sigma(t)^2}x(t),\\ c^*(t)=\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}\big[\beta(t)\big]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t).\end{cases}\tag{24}$$

其中

$$\beta(t)=\mathrm{e}^{\int_t^T k(s)\mathrm{d}s}\Big[\mathrm{e}^{\frac{\rho T}{\lambda-1}}+\frac{1}{1-\lambda}\int_t^T h(s)\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda-1}\int_s^T k(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]^{1-\lambda},$$

$$k(t)=\lambda\Big[r(t)+\frac{1}{2(1-\lambda)}\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\Big],$$

$$h(t)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}.$$

3) $\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t)\le x(t)$。
值函数为 $V(t,x)=\gamma(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}$，最优投资消费策略为

$$\begin{cases}\pi_0^*(t)=\Big[\frac{1}{\lambda-1}\Big(\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\Big)+1\Big]x(t),\\ \pi^*(t)=\frac{(b(t)-r(t))}{(1-\lambda)\sigma(t)^2}x(t),\\ c^*(t)=\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}\big[\gamma(t)\big]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t).\end{cases}\tag{25}$$

其中

$$\gamma(t)=\mathrm{e}^{\int_t^T l(s)\mathrm{d}s}\Big[\mathrm{e}^{\frac{\rho T}{\lambda-1}}+\frac{1}{1-\lambda}\int_t^T h(s)\mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda-1}\int_s^T l(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]^{1-\lambda},$$

$$l(t)=\lambda\Big[r(t)+\frac{1}{2(1-\lambda)}\Big(\frac{(b(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}+\frac{(\Phi(t,S)-r(t))^2}{\Omega(t,S)^2}\Big)\Big],$$

$$h(t)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}.$$

根据上面结果可知

$$x(t)\le\hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t),\quad \hat{\pi}_0(t)+\hat{\pi}(t)\le x(t)\le\tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t),\quad \tilde{\pi}_0(t)+\tilde{\pi}(t)\le x(t).$$

分别等价于

$$\Phi(t,S)\ge r(t),\quad r(t)\le\Phi(t,S)\le r(t)+a(t),\quad r(t)+a(t)\le\Phi(t,S).$$

所以综合以上讨论，我们有以下主要结论。

定理 2 当投资者的效用函数为形如 (21) 的 HARA 效用函数时，该投资者的最优投资消费策略为

$$\pi_0^*(t)=\begin{cases}\left[\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{b(t)-r}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-a(t)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right)+1\right]x(t), & \Phi(t,S)\ge r(t),\\ \left[\frac{b(t)-r(t)}{(\lambda-1)\sigma(t)^2}+1\right]x(t), & r(t)\le\Phi(t,S)\le r(t)+a(t),\\ \left[\frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{b(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}+\frac{\Phi(t,S)-r(t)}{\Omega(t,S)^2}\right)+1\right]x(t), & r(t)+a(t)\le\Phi(t,S),\end{cases}\tag{26}$$

$$\pi^*(t)=\frac{b(t)-r(t)}{(1-\lambda)\sigma(t)^2}x(t),\tag{27}$$

$$c^*(t)=\begin{cases}e^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}[\alpha(t)]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t), & \Phi(t,S)\ge r(t),\\ e^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}[\beta(t)]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t), & r(t)\le\Phi(t,S)\le r(t)+a(t),\\ e^{\frac{\rho t}{\lambda-1}}[\gamma(t)]^{\frac{1}{\lambda-1}}x(t), & r(t)+a(t)\le\Phi(t,S).\end{cases}\tag{28}$$

值函数为

$$V(t,x)=\begin{cases}\alpha(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}, & \Phi(t,S)\ge r(t),\\ \beta(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}, & r(t)\le\Phi(t,S)\le r(t)+a(t),\\ \gamma(t)\frac{x^\lambda}{\lambda}, & r(t)+a(t)\le\Phi(t,S).\end{cases}$$

其中 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ 分别由 (23), (24) 和 (25) 给出。

注 2 不难得到投资者在不同情形下，在衍生证券上的最优投资量为

$$\pi_d^*(t)=\begin{cases}\frac{\Phi(t,S)-a(t)-r(t)}{(1-\lambda)\Omega(t,S)^2}x(t), & \Phi(t,S)\ge r(t),\\ 0, & r(t)\le\Phi(t,S)\le r(t)+a(t),\\ \frac{\Phi(t,S)-r(t)}{(1-\lambda)\Omega(t,S)^2}x(t), & r(t)+a(t)\le\Phi(t,S).\end{cases}\tag{29}$$

从 (26)-(29) 可以看出，投资消费决策取决于无风险利率、风险证券预期收益率、价格的波动率、衍生证券的期望收益率和波动率，以及投资者的风险偏好 λ。当衍生证券的期望收益率小于无风险利率时，投资者买入衍生证券是不划算的，而卖空却有利可图，因此应选择卖空，并且卖空的所得全部投资于无风险证券。当衍生证券的期望收益率大于无风险利率而小于无风险利率与做市商所要求的收益率之和时，对投资者而言此时卖空还是买入衍生证券都不合算，

所以此时最佳持有量为0。当衍生证券的收益率大于无风险利率与做市商所要求的收益率之和时，投资者选择买入衍生证券就可以赢利，此时的买入衍生证券的量就是在无风险证券投资上减少的量。而在整个投资过程中，衍生证券的期望收益率、无风险利率以及做市商要求的回报率的变化都不会影响风险证券的投资，风险证券的投资只受风险证券本身收益和风险的影响。

5 数值示例

假定有三个投资者分别是A、B和C，其初始资产都为$x = 1$百万，投资期都为$T = 1$年，但是他们所在的投资市场环境不同，具体如下表1左侧所示。三人的效用函数都为如下幂效用函数

$$U_1(t,x) = U_2(t,x) = \frac{x^\lambda}{\lambda}, \quad \lambda \in (0,1).$$

设投资者A、B和C的风险偏好系数为$\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \frac{1}{2}$。

表1: 不同市场环境下的不同投资消费策略

	市场环境						最优投资消费策略(单位：百万元)			
投资者	r	b	σ	Φ	Ω	a	π_0^*	π^*	π_d^*	c^*
A	0.06	0.36	0.40	0.05	0.12	0.02	1.417	3.75	-4.167	0.292
B	0.05	0.30	0.36	0.06	0.30	0.02	-2.858	3.858	0	0.335
C	0.05	0.40	0.60	0.30	0.50	0.03	-2.944	1.944	2	0.303

投资者A、B和C投资环境主要的不同在于$A: \Phi < r$, $B: r < \Phi$, $r + a$, $C: r + a < \Phi$。因此在衍生证券上的投资就又很大差异，A选择卖空，B选择不投资，C选择持有多头。所以投资者对衍生证券是卖空、不投资还是买入主要决定于r, Φ以及a之间的关系。在投资期的消费基本差异不大，也就是说消费决策对Φ的变化反应不灵敏。

参考文献：

[1] Merton R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, 51: 247-257

[2] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373-413

[3] Karatzas I, Lehoczky J, Shreve S. Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987, 25: 1557-1586

[4] Karatzas I, Lehoczky J, Shreve S. Existence and uniqueness of multi-agent equilibrium in a stochastic, dynamic consumption-investment model[J]. Mathematics of Operations Research, 1990, 15: 80-128

[5] Sethi S. Optimal Consumption and Investment with Bankruptcy[M]. Kluner Academic Publishers, 1998

[6] Hauson F B, Westman J. Optimal consumption and portfolio control for jump-diffusion stock process with log-normal jumps[J]. Proceeding of the American Control Conference, 2002: 8-10

[7] Ksendal B, Sulem A. Optimal consumption and portfolio with both fixed and proportional transaction costs[J]. SIMA J Control Optim, 2002, 40(6): 1765-1790

[8] Peter C, Xing J, Dilip B M. Optimal investment in derivative securities[J]. Finance and Stochastics, 2001, 5: 33-59

[9] 郭文旌，顾荣宝. 含期权的最优投资消费决策[J]. 中国管理科学，2005, 13(5): 23-28
Guo W J, Gu R B. Optimal investment and consumption decisions including option[J]. Chinese Journal of Management Science, 2005, 13(5): 23-28

[10] 明宗峰，郭文旌，胡奇英. 以可存品与非可存品为消费对象的最优投资消费决策[J]. 控制理论与应用，2004, 60(6): 485-496
Ming Z F, Guo W J, Hu Q Y. Optimal investment and consumption decisions with perishable and durable products as consumption objects[J]. Control Theory & Applications, 2004, 60(6): 485-496

[11] 郭文旌. 非连续股价及不完全信息下的最优投资消费[J]. 工程数学学报，2006, 23(2): 266-272
Guo W J. Optimal portfolio and consumption with discontinuous prices and incomplete information[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 266-272

[12] John C H, 张陶伟译. 期权、期货和衍生证券[M]. 北京：华夏出版社，1997
John C H. Options, Futures, and Other Derivative Securities[M]. Beijing: Huaxia Publishers, 1997

[13] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Political Economy, 1973, 81: 637-654

[14] Fleming W H, Soner H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions[M]. Springer-Verlag, 1993

Optimal Investment and Consumption Decision of Derivatives

GUO Wen-jing

(School of Finance, Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing 210046)

Abstract: Derivatives are sold or bought at different prices in practice. Studied in this paper is an investment and consumption decision problem about derivatives with different sale price and purchase price. With maximizing the consumption utility and terminal wealth utility as goal, we establish the model. With stochastic optimization control theory, the problem is divided into three cases and the optimal investment and consumption strategies of three cases are presented, respectively. The explicit strategies are given for the power utility function. Finally a numerical example is given to illustrate the variation of strategies with the change of market.

Keywords: derivatives; investment-consumption; difference of sale price and purchase price; power utility function

Received: 26 Feb 2008. **Accepted:** 16 July 2008.

Foundation item: The Natural Science Foundation of China (7071058; 70701016); the Cultivation Fund of the Key Scientific and Technical Innovation Project, Ministry of Education of China (708044); the University Philosophy and Social Science Project of Jiangsu Province (07SJB790013; 9SJB790013); the University Natural Science Project of Jiangsu Province (08KJB110004); the China Postdoctoral Science Foundation funded project (20080431079); the China Postdoctoral Special Science Foundation (200902507).